80e Année — Août-Septembre 1969 — No 1-2

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

Sujets donnés aux concours d'Agrégation et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1969.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques générales.

N.B. — Il sera tenu le plus grand compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Dans ce problème les seuls corps qui interviennent sont **R** et **C**; tous les espaces vectoriels étudiés sont de dimension finie. On appellera sous-espaces les sous-espaces vectoriels.

5876. — Étant donné un espace vectoriel réel E de dimension n, on rappelle que son complexifié, noté ici $c(\mathrm{E})$, est l'espace vectoriel complexe décrit par $z = x + iy$, où x et y sont des vecteurs de E; x est dit partie réelle de z, notée $\mathfrak{R}(z)$, y est dit partie imaginaire de z, notée $\mathfrak{I}(z)$, $[\mathfrak{I}(z) = \mathfrak{R}(-iz)]$. Le conjugué du vecteur z est le vecteur $\bar{z} = x - iy$.

L'ensemble des conjugués des vecteurs d'une partie V de $c(\mathrm{E})$ est la partie conjuguée de V notée $\overline{\mathrm{V}}$.

E est une partie de $c(\mathrm{E})$; le corps de référence est **C** pour les sous-espaces de $c(\mathrm{E})$, **R** pour ceux de E.

Tout endomorphisme f de E admet pour prolongement à $c(\mathrm{E})$ l'endomorphisme, noté f', défini par $f'(x + iy) = f(x) + if(y)$.

I. — Dans *toute cette partie* Σ *désigne un sous-espace de* $c(\mathrm{E})$. *Le complexifié d'un sous-espace* H *de* E *est noté* $c(\mathrm{H})$.

1° *a*) Le sous-espace Σ de $c(\mathrm{E})$ étant donné, montrer que ses images par les applications $z \longmapsto \mathfrak{R}(z)$ et $z \longmapsto \mathfrak{I}(z)$ sont un même sous-espace de E, noté $l(\Sigma)$.

b) Le sous-espace H de E étant donné, préciser $l[c(\mathrm{H})]$.

2° *a*) Montrer que $\Sigma \cap \mathrm{E}$ est un sous-espace de E et que l'on a l'égalité

$$\Sigma \cap \overline{\Sigma} = c(\Sigma \cap \mathrm{E}).$$

b) Établir la formule $\Sigma + \overline{\Sigma} = c[l(\Sigma)]$.

c) On dit qu'un sous-espace Σ de $c(\mathrm{E})$ est un complexifié s'il existe un sous-espace H de E vérifiant $\Sigma = c(\mathrm{H})$. Montrer que Σ est un complexifié si, et seulement si, on a l'égalité $\Sigma = \overline{\Sigma}$.

3° Un sous-espace de $c(\mathrm{E})$ sera dit irréel si son intersection avec E est réduite au vecteur nul.

a) Montrer que Σ est irréel si, et seulement si, la dimension de $l(\Sigma)$ [en abrégé $\dim l(\Sigma)$] est double de celle de Σ.

b) Établir pour tout Σ la formule

$$\dim l(\Sigma) = 2 \dim \Sigma - \dim (\Sigma \cap \overline{\Sigma}).$$

4° *a*) Démontrer que Σ est irréel si, et seulement si, l'application $z \longmapsto \mathfrak{R}(z)$ de Σ dans $l(\Sigma)$ est injective [ou l'application $z \longmapsto \mathfrak{I}(z)$].

b) Démontrer qu'un système $z_1, z_2, \ldots, z_q$ de vecteurs de $c(\mathrm{E})$ est une base d'un sous-espace irréel si, et seulement si, les $2q$ vecteurs $\mathfrak{R}(z_1), \mathfrak{R}(z_2), \ldots, \mathfrak{R}(z_q), \mathfrak{J}(z_1), \mathfrak{J}(z_2), \ldots, \mathfrak{J}(z_q)$ constituent un système libre de E.

La dimension d'un sous-espace irréel Σ peut donc prendre toute valeur compatible avec la relation

$$2 \dim \Sigma \leqslant \dim \mathrm{E}.$$

c) Établir qu'on obtient tous les sous-espaces irréels de $c(\mathrm{E})$ par le procédé suivant : on prend un sous-espace H de E de dimension paire et un automorphisme σ de H *de carré* — 1 [c'est-à-dire dont le carré est l'opposé de l'automorphisme identique]; alors $\Sigma = \{x + i\sigma(x);\ x \in \mathrm{H}\}$ [ensemble des vecteurs $x + i\sigma(x)$, où x décrit H] est un sous-espace irréel et l'on a la relation $l(\Sigma) = \mathrm{H}$.

5° *a*) Montrer qu'il n'existe pas d'automorphisme *de carré* — 1 dans un espace réel de dimension impaire.

b) Montrer que tout automorphisme *de carré* — 1 d'un espace réel de dimension paire $2p$ peut être représenté dans une base convenablement choisie par la matrice Ω dont l'élément ω_{jk} ($j^{\text{ème}}$ ligne, $k^{\text{ème}}$ colonne) vaut 1 si $j - k = p$, — 1 si $k - j = p$, 0 dans les autres cas; on note

$$\Omega = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\mathrm{I} \\ \hline \mathrm{I} & 0 \end{array}\right].$$

II. — 1° Montrer que tout endomorphisme φ de $c(\mathrm{E})$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $\varphi = f' + ig'$, où f' et g' sont les prolongements à $c(\mathrm{E})$ de deux endomorphismes f et g de E.

2° *On appelle* $\mathcal{L}$ *l'ensemble des endomorphismes de* $c(\mathrm{E})$ *tels que l'image de* E *soit sous-espace de* $c(\mathrm{E})$.

a) Montrer que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

— $\varphi \in \mathcal{L}$;
— $\varphi(\mathrm{E}) = (i\varphi)(\mathrm{E})$;
— $\varphi(\mathrm{E}) = \varphi[c(\mathrm{E})]$;
— $l(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \mathrm{E}$ (Ker φ désigne le noyau de φ).

b) Pour tout $\varphi = f' + ig'$ appartenant à $\mathcal{L}$, établir la formule

$$2 \operatorname{rang} \varphi = \dim \mathrm{E} - \dim (\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g).$$

3° *Soit* $\mathcal{L}_0$ *la partie de* $\mathcal{L}$ *dont les éléments ont un noyau irréel.*

a) Montrer que, si la dimension n de E est impaire, $\mathcal{L}_0$ est vide. *On suppose, dans la suite de cette question, que* n *est un nombre pair* $2p$.

b) Montrer que, si $\varphi = f' + ig'$ appartient à $\mathcal{L}_0$,

— Ker $f \cap$ Ker g est réduit au vecteur nul;
— il existe un automorphisme σ de E *de carré* — 1 vérifiant

$$f = g \circ \sigma, \qquad g = -f \circ \sigma.$$

c) Soit f et g deux endomorphismes de E dont les noyaux ont une intersection réduite au vecteur nul. S'il existe un endomorphisme τ de E satisfaisant aux relations $f = g \circ \tau$, $g = -f \circ \tau$, alors $f' + ig'$ appartient à $\mathcal{L}_0$, τ est unique et *de carré* — 1.

4° L'endomorphisme $\varphi = f' + ig'$ de $c(\mathrm{E})$ étant donné, on se propose d'étudier le système, où τ désigne un endomorphisme inconnu de E :

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} g \circ \tau = f \\ f \circ \tau = -g \end{cases}$$

a) (T) admet au moins une solution si, et seulement si, $\varphi \in \mathcal{L}$.

b) (T) admet une solution unique si, et seulement si, on a

$$\varphi \in \mathcal{L} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\,\varphi \text{ irréel}.$$

c) Si la dimension de E est paire, quel que soit φ appartenant à $\mathcal{L}$, une solution de (T) au moins est un automorphisme *de carré* — 1.

III. — *On suppose dans cette partie que* E *est un espace vectoriel euclidien de dimension* n. *On prolonge à* $c(\mathrm{E})$ *le produit scalaire de* E *en posant*

$$z.z' = (x + iy).(x' + iy') = x.x' - y.y' + i(x.y' + y.x')$$

quels que soient $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$. *On appelle carré scalaire de* z, *noté* z^2, *le produit scalaire* $z.z$.

Un vecteur de $c(\mathrm{E})$ *est dit isotrope si son carré scalaire est nul. Un sous-espace totalement isotrope [en abrégé: SETI] est un sous-espace de* $c(\mathrm{E})$ *dont tous les vecteurs sont isotropes. Un SETI est donc irréel.*

1° *a*) Étant donné un système orthonormé de $2q$ vecteurs de E, $u_1, u_2, \ldots, u_q, v_1, v_2, \ldots, v_q$, montrer que le système $u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, \ldots, u_q + iv_q$ engendre un SETI de dimension q.

b) Étant donné un espace vectoriel réel E_0 et un sous-espace irréel Σ_0 de son complexifié, établir qu'il existe sur E_0 au moins une structure euclidienne pour laquelle Σ_0 soit un SETI.

Pour l'étude des SETI de $c(\mathrm{E})$, *on associe à tout sous-espace irréel* Σ *de* $c(\mathrm{E})$ *l'automorphisme* σ *de* $l(\Sigma)$, *étudié en* I, 4°, *c*, *qui à tout* x *de* $l(\Sigma)$ *associe l'unique vecteur* y *de* E *tel que* $x + iy$ *soit élément de* Σ.

2° *a*) Montrer que, pour un endomorphisme τ d'un espace euclidien, deux quelconques des trois propriétés suivantes impliquent la troisième :

— τ est orthogonal,
— τ est de *carré* -1,
— pour tout x le produit scalaire $x.\tau(x)$ est nul.

b) Montrer qu'un sous-espace irréel Σ de $c(\mathrm{E})$ est un SETI si, et seulement si, son automorphisme associé, σ, est orthogonal.

c) Montrer que tout automorphisme orthogonal *de carré* -1 d'un espace euclidien peut être représenté dans une base orthonormée convenable par la matrice Ω définie en I, 5°, *b*.

3° Un système $z_1, z_2, \ldots, z_q$ de vecteurs de $c(\mathrm{E})$ sera dit normal lorsque les vecteurs $\mathfrak{R}(z_1), \mathfrak{R}(z_2), \ldots, \mathfrak{R}(z_q), \mathfrak{I}(z_1), \mathfrak{I}(z_2), \ldots, \mathfrak{I}(z_q)$ forment un système orthonormé de E. Tout système normal est la base d'un SETI (voir III-1°-*a*). Établir que :

a) tout SETI admet au moins une base normale;

b) tout système normal d'un SETI peut être complété en une base normale de ce SETI.

4° *a*) La dimension n de E étant égale à $2p$ ou $2p + 1$, montrer que tout SETI est inclus dans un SETI de dimension p.

On appellera sous-espace totalement isotrope maximal [en abrégé SETIM] tout SETI de dimension p.

b) Montrer que, si la dimension de E est $2p$, il existe deux SETIM et deux seulement contenant un SETI donné de dimension $p - 1$.

5° *Dans cette question,* E *est supposé de dimension* $2p$ *et orienté.*

a) Montrer que tout automorphisme orthogonal de E qui commute avec un automorphisme orthogonal *de carré* -1 est direct.

b) Étant donné un automorphisme σ de E, orthogonal et *de carré* -1, établir que toutes les bases orthonormées dans lesquelles il est représenté par la matrice Ω définie en I, 5°, *b* sont de même sens.

c) Étant donné un SETIM Σ, montrer que, quelle que soit la base normale $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de Σ, le sens de la base orthonormée $\mathfrak{R}(z_1), \mathfrak{R}(z_2), \ldots, \mathfrak{R}(z_p), \mathfrak{I}(z_1), \mathfrak{I}(z_2), \ldots, \mathfrak{I}(z_p)$ de E ne dépend que de Σ. Ce sens (direct ou indirect) est par convention le sens de Σ.

d) Étant donné deux SETIM, Σ et Σ', montrer qu'il existe au moins un automorphisme orthogonal h de E dont le prolongement h' à $c(\mathrm{E})$ transforme Σ en Σ'.

e) Établir que le prolongement à $c(\mathrm{E})$ de tout automorphisme orthogonal direct (resp. indirect) transforme tout SETIM en un SETIM de même sens (resp. de sens contraire).

6° *Dans cette question* E *est simplement supposé de dimension* $2p$.

a) Montrer que tout SETIM de $c(\mathrm{E})$ est sous-espace propre du prolongement d'un automorphisme orthogonal *de carré* -1 de E. Combien d'automorphismes orthogonaux *de carré* -1 répondent à la question pour un SETIM donné?

b) Étant donné deux automorphismes f et g de E, soit $\varphi = f' + ig'$ l'endomorphisme de $c(\mathrm{E})$ associé.

Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un SETIM si, et seulement si, f et g sont des automorphismes tels que $g^{-1} \circ f$ soit un automorphisme orthogonal *de carré* -1.

Montrer que $\varphi(\mathrm{E})$ est un SETIM si, et seulement si, f et g sont des automorphismes tels que $f \circ g^{-1}$ soit un automorphisme orthogonal *de carré* -1.